הא-סימטריה של הכפל האריתמטי

תלמה גביש

המאמר מצביע על הא-סימטריה בתפקידים של מרכיבי הכפל, על חשיבות ההבחנה בין מרכיבים אלה, על ההשלכות של א-סימטריה זו על החילוק, על ההשפעה של הבחנה זו על ההבנה המתמטית והלשונית ועל השימוש במינוחים המתאימים בלשון העברית.

המאמר מתאר את הערפול הקיים בנושא, את סיבותיו ואת הפתרון הלשוני-מתמטי המתבקש.

סימטריה וא-סימטריה בחיבור, בחיסור ובחילוק

למרכיבים של החיבור, החיסור והחילוק ניתנו שמות מוגדרים וברורים.

מרכיבי החיבור נקראים "מחוברים", מתוך הנחה שהחיבור הינו סימטרי ולמרכיביו אותו תפקיד ביחס לפעולת החיבור.

לדוגמה,

בתרגיל: $3 + 2 =$

ה-2 מתחבר ל-3 , וה-3 מתחבר ל-2 ולשניהם אותו מעמד ביחס לחיבור.

כדי שנוכל לבצע את החיבור חייבים שניהם להיות בעלי אותו כינוי. לא נוכל לבצע חיבור של 2 שולחנות ל-3 עכברים.

לדוגמה,

בגינה פרחו בבוקר 7 פרחים, אחר הצהריים פרחו עוד 4 פרחים. כמה פרחים פרחו בגינה במשך היום?

7 פרחים ועוד 4 פרחים הם 11 פרחים.

גם בפעולת החיבור יש מידה מסוימת של א-סימטריה, שכן יש הבדל בין המצב שבו בתחילה פרחו 4 פרחים ואחר כך פרחו עוד 7 פרחים, לבין המצב שבתחילה פרחו 7 פרחים ואחר כך פרחו עוד 4 פרחים.

המתמטיקה מתרגמת מצבים קיימים למערכות יחסים מתמטיות, לכן אין להתעלם

מהשוני בין שני התהליכים, אם כי בסופו של דבר סך כל הפרחים הפורחים שווה בשני תיאורי המצב.

הא-סימטריה בחיבור אינה משמעותית כביתר הפעולות האריתמטיות. כינויי המחוברים הם אותם הכינויים, החלפת סדר ההופעה של המחוברים אינה משפיע על התוצר הסופי ואף לא על התחושה של הבנת המצב. אם כי לאדם הפוסע בשבילי הגן בשעות שבין פריחת הבוקר לזו של אחר הצהרים, יש הבדל משמעותי בין צפייה במעט פריחה לבין צפייה בפריחה מרובה.

לעומת הא-סימטריה המעודנת של החיבור, היחסים בין מרכיבי החיסור הם א-סימטריים במובהק: יש מי שמקבל פעולה ויש מי שמבצע את הפעולה, לכן מבחינים בין "הַמְחֻסָּר", שהוא מקבל הפעולה, לבין "הַמְחַסֵּר", שהוא המבצע את הפעולה על המחוסר.

הלשון העברית משקפת את היחסים הא-סימטריים האלה. מקבל הפעולה: הַמְחֻסָּר, הוא הסביל ועל כן שמו נגזר מבנין פֻּעַל. מבצע הפעולה: הַמְחַסֵּר, שמו נגזר מבנין פִּעֵל.

בעוד שבחיבור הא-סימטריה מתבטאת רק בבעיות שבהן מספרים מְכֻנִּים, הרי בחיסור היא הכרחית אפילו בתרגילים המורכבים ממספרים טהורים בלבד. (מספרים טהורים הם מספרים ללא כינוי).

החילוק, בדומה לחיסור, הוא א-סימטרי אפילו בתרגילים בעלי מספרים טהורים. המרכיב הראשון הוא מקבל הפעולה ועל כן הוא "מְחֻלָּק" (פֻּעַל) ואילו המרכיב השני הוא "מְחַלֵּק", כי הוא הפָּעִיל, עושה הפעולה, ושמו נגזר מבנין פִּעֵל.

משמעות הכפל

כדי להבין את מקור הבעיה בכפל, יש לעמוד על אופייה של פעולה אריתמטית זאת.

בעיית המינוחים מתעוררת בכפל בשל חוק החילוף. דומה שתפקידם של שני הגורמים ניתן להחלפה, ולכן ההקפדה על המינוח אינה חשובה. ולא היא!

יש לזכור שחוק החילוף של הכפל נכון רק לגבי התוצאה של פעולת הכפל, לא לגבי המשמעות. התוצאה של 5 x 3 = ושל 3 x 5 = זהה, אבל המשמעות שלהם שונה.

נשווה שתי בעיות:

בעיה א':

קניית 4 זֵרים שכל אחד מהם עלה 10 ש"ח תעלה לקונה 40 ש"ח.

בעיה ב':

קניית 10 זֵרים שכל אחד מהם יעלה 4 ש"ח תעלה לקונה 40 ש"ח.

למרות ההוצאה הכספית השווה בשני המקרים, הקונה בבעיה א' ייצא עם 4 זרים בידיו, ואילו השני ייצא ו-10 זרים בידיו.

אלה שני מצבים שונים זה מזה במובהק.

מעקב אחר הכינויים יצביע על הבדל נוסף.

בשני המקרים שילם הקונה 40 ש"ח, אלא שהתרגיל שמשקף את המצב בבעיה א' הוא:

4 x ש"ח 10 = ש"ח 40

אין לרשום כינוי ל-4 , שכן אין לו משמעות ביחס לתהליך או לתוצאה. ה-4 מציין את מספר הקבוצות, שבכל אחת מהן יש 10 ש"ח (מספר הפעמים ששולמו 10 ש"ח). אפשר ליצור אינספור בעיות שיתוארו באותו תרגיל עם אותם הכינויים.

למשל:

קניתי 4 מחברות שכל אחת מהן עלתה 10 ש"ח. כמה שילמתי?

לילד 4 עטים מחירו של כל עט 10 ש"ח. מה מחירם של כל העטים?

הכינויים: זֵרים, מחברות, עטים או כל כינוי אחר לא ישנו את טיב הפעולה, שמשמעה: 4 **פעמים** 10 ש"ח.

ה-4 מונה את מספר הקבוצות ואין לו אותו תפקיד כמו ה-10 , המונה את מספר הפריטים בכל קבוצה.

פתרון בעיה ב':

40 ש"ח = 4 ש"ח x 10

ל-10 יש תפקיד של מניית מספר הקבוצות (הזֵרים), שהוא מספר הפעמים של תשלום 4 ש"ח (מספר הפריטים בכל קבוצה).

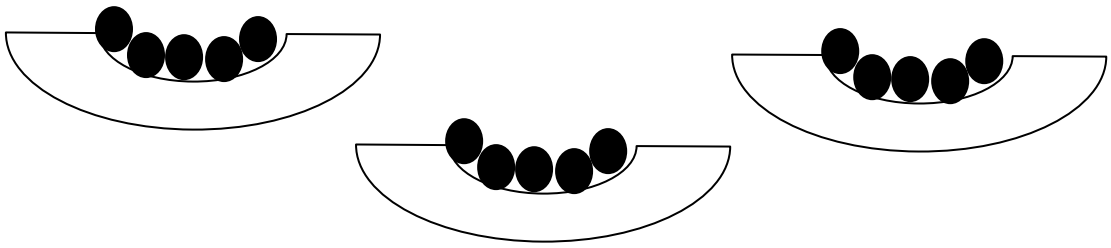
בכפל יש, אם כן, תפקידים שונים לחלוטין לשני המרכיבים.

אחד המרכיבים מונה את מספר הקבוצות, לכן הוא יהיה חסר כינוי, למרות כינויו בבעיה. המרכיב השני מונה את מספר הפריטים בכל קבוצה והוא בעל כינוי השווה לכינוי של המכפלה.

חוק החילוף של הכפל

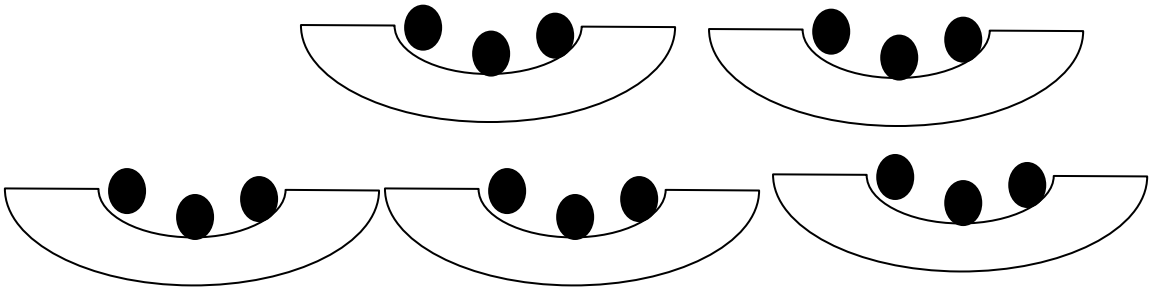
המשמעות של חוק החילוף בכפל האריתמטי היא שתוצאת החישוב נשמרת אם מחליפים את סדר הגורמים. אולם, כפי שראינו, המציאות המתוארת ע"י "שלוש פעמים חמש" שונה מזו המתוארת ע"י "חמש פעמים שלוש":

כאשר לרשותנו 3 קופסאות ובכל קופסא יש 5 סוכריות, כמו בציור א', אנו יכולים לחשב כמה סוכריות יש לנו בסך-הכל.



ציור א'

כאשר לרשותנו 5 קופסאות ובכל קופסא יש 3 סוכריות, כמו בציור ב', אנו יכולים לחשב כמה סוכריות יש לנו בסך-הכל.



ציור ב'

בשני המקרים נקבל 15 סוכריות, אבל הגענו לאותה כמות של סוכריות משני מצבים שונים, כפי שמשקפים שני הציורים.

בראשון:

3 פעמים 5.
(3 times 5)

בשני:

5 פעמים 3.
(5 times 3)

השימוש במונח "פעמים" (times) מדגיש את משמעות הכפל.

המעמד השונה של שני מרכיבי הכפל, שמצד אחד הוא שונה (בבעיות) ומהצד השני הוא שווה (בתוצאה של תרגילים, לפי חוק החילוף), הוא שיצר מחלוקות ומינוחים שונים.

הגדרות הקיימות במילונים ובאנציקלופדיות בעברית ובאנגלית

במילון למונחי מתמטיקה , עברי-אנגלי-צרפתי-גרמני (ת"ש)[1]. סדרת מלוני ועד הלשון העברית. ירושלים. בעמוד 13 טור ב' רשום התרגום לאנגלית:

נִכְפָּל , מְכֻפָּל	multiplicand
כּוֹפֵל, מְכַפֵּל	multiplier
גּוֹרֵם	factor

וכך גם לפי האקדמיה ללשון העברית:

ערך	מונח עברי	מונח לועזי	מילון
כּוֹפֵל	**כּוֹפֵל**	Multiplier	מתמטיקה (תשמ"ה), 1985
כּוֹפֵל	**כּוֹפֵל, מְכַפֵּל**	Multiplier	מתמטיקה (ת"ש), 1940
כּוֹפֵל	**כּוֹפֵל**		חשבון (תרע"ב), 1912

ערך	מונח עברי	מונח לועזי	מילון
נִכְפָּל	**נִכְפָּל**	Multiplicand	מתמטיקה (תשמ"ה), 1985
נִכְפָּל	**נִכְפָּל, מְכֻפָּל**	Multiplicand	מתמטיקה (ת"ש), 1940
נִכְפָּל	**נִכְפָּל**		חשבון (תרע"ב), 1912

במילונים שונים באנגלית מצאנו בלבול במינוחים. יש הקוראים ל-3 בתרגיל:

3 x 5 =

כופל [multiplier] ול-5 באותו תרגיל : נכפל [multiplicand], ויש הגורסים את ההיפך.

[1] אנו השתמשנו בתרגום לאנגלית.

באנציקלופדיה **Britannica (1985)**, שהודפסה בארה"ב, בכרך 14 עמ' 76 טור ראשון, תחת הנושא Arithmetic, כתוב:

From the above laws it is evident that a repeated sum such as 5 + 5 + 5 is independent of the way in which the summands are grouped and is written 3 x 5. Thus, a second binary operation called multiplication is defined. The number 5 is called multiplicand, the number 3, which denotes the number of summands, is called the multiplier, and the result 3 x 5 is called the product.

המינוחים שוועד הלשון תרגם מאנגלית מופיעים במילונים העבריים בהיפוך משמעות.

לדוגמה, במילון אבן-שושן:

בתרגיל : = 5 x 3

3 נקרא: "נכפל", ו- 5 נקרא: "כופל".

יתכן, שמקור ההיפוך הזה בחיסור ובחילוק, שנעשתה בהם אנלוגייה מוטעית. בשניהם הגורם הראשון הוא הסביל, והשני הוא הפועל. אבל עניין זה אינו נימוק של ממש, משום שהוא נצמד להיבט חיצוני, ולא למשמעות האריתמטית של פעולת הכפל, שכמו ביתר הפעולות האריתמטיות, היא משמעות כמותית.

המצב בספרי הלימוד בארץ

בספרים ובחוברות עבודה שונות יש שימוש שונה במינוחים.

דוגמאות לשימוש כזה:

א)

רחבלסקי בנימין. (תשמ"ב ,1981) .**מספרים שלמים** חוברת ב' ,כפל וחילוק מספרים שלמים. הוצאת מהות. תל-אביב.

עמ' 3:

"12 = 4 x 3

המספר 3 נקרא כופל.

המספר 4 נקרא נכפל.

התוצאה 12 נקראת מכפלה.

הכופל והנכפל נקראים <u>גורמים.</u>"

ב)

בורק שרה. (1993). **חשבון לתלמיד** חלק ששי. הוצאת ספרים "יבנה". תל-אביב. עמ' 35:

"1,000 = 4 x 250

מכפלה כופל נכפל"

ג)

בחוברות של: "אחת, שתים ו...שלוש" , כמו גם בספרי לימוד אחרים, משתמשים רק במונח "**גורמים**".

השימוש במונח "גורמים" <u>במקום</u> "כופל-נכפל"[2], כפי שנוהגים חלק מספרי הלימוד, מתעלם מהתפקיד הלא-סימטרי שבין הכופל לנכפל, ומדגיש רק את חוק החילוף של הכפל, הנכון לגבי התוצאה ולא לגבי הדרך שהובילה אליה.

היפוך משמעות או התחמקות משימוש מתמטי מדוייק במושג כלשהו גורמים נזק להבנת השפה המתמטית, פגיעה בלשון העברית, אי יכולת להבין הוראות ובעיות מילוליות ומתוך כל אלה אי-הבנה של יחסים מתמטיים.

הסיבה להתפתחות הזאת נעוצה במה שהתרחש מזה כ-3 עשורים בחינוך המתמטי בבית הספר היסודי בישראל . בשנים אלה חל מעבר מהדגשת המספר המכֻּנֶה, שמקנה משמעות לפעילות המתמטית, אל מספרים טהורים, שהדגישו פתרונות טכניים. מעבר זה התבטא בהכנסת הבדידים כישויות מופשטות ובהפרדה מוחלטת של בעיות מתמטיות מתרגילים, עד כדי יצירת חוברות נפרדות לתרגילים וחוברות נפרדות לבעיות.

במספרים טהורים חוק החילוף של הכפל אינו מזמן הבחנה בא-סימטריה של הכפל, כפי שהיא מתבטאת בבעיות.

ההשלכות של הקביעה הלשונית על ההבנה המתמטית

השימוש במונח: "גורמים" באורח בלעדי, תוך התעלמות מההבחנה בין כופל לנכפל, מטשטש את ההבחנה בין שני הביטויים:

ביטוי א':

7 פעמים 5 ילדים.
7 ו-5 הם גורמים.

ביטוי ב':

5 פעמים 7 ילדים.
7 ו-5 הם גורמים.

פועל יוצא מטשטוש המושגים הוא שימוש במהופך במושגים, כפי שמוצאים במילון של אבן שושן ובספר של שרה בורק המצוטט לעיל.

שימוש במונחים "כופל", "נכפל" במהופך: כמו בתרגיל: $3 \times 5 = 15$, שבו ה-3 נקרא **נכפל** וה-5 **כופל** , פוגם בהבנת יחסי פעיל-סביל, שבין הכופל והנכפל.

טעות זו גורמת חוסר בהירות לא רק לגבי משמעות הכפל, אלא גם לגבי הכינוי בעת מתן התשובה.

כמו בתיאור המצב הבא:

במכונית אחת נוסעים 3 ילדים. כמה ילדים נוסעים ב-5 מכוניות?

---

[2] אין לשלול את השימוש ב"גורמים" <u>לצד</u> ההבחנה בין "כופל" ו"נכפל".

התשובה, כמובן, 15 ילדים, ולא 15 מכוניות.

כדי להבין שמדובר במנייתם של הילדים ולא של המכוניות יש צורך בהבחנה בין מקבל הפעולה לבין עושה הפעולה.

הגורם הסביל והגורם הפעיל

מיהו הגורם הפועל ומיהו הגורם שעליו פועלים?

כמו בחיסור ובחילוק, השאלה היא עתה – מיהו המספר שפועלים עליו, ומיהו הפועל?

בתרגיל

2 x 3

שהוא :

2 כפול 3

או:

שתי פעמים 3.

לקחנו את המספר 3 וחיברנו אותו 2 פעמים (3 + 3). כלומר, פעלנו על המספר 3, בעזרת המספר 2. המספר 3 הוא אם כן זה שפועלים עליו, הסביל. הוא אמור אם כן להיקרא "נכפל" (בנין נפעל), ואילו ה-2, הפועל, אמור להיקרא "כופל" (בנין פָּעַל).

וכך ראינו בבריטניקה:

3 נקרא: multiplicand, ואילו ה-2 נקרא: multiplier.

לעומת בריטניקה, הקביעה במילונים העבריים מקורה בטעות.

השימוש במונחים: "כופל", "נכפל" בהיפוך, שבו בתרגיל

2 x 3 = 6

ה-2 נקרא נכפל וה-3 כופל , בנוסף להתעלמות מהחוקיות הלשונית של פעיל-סביל שבין הכופל והנכפל, תוצאתו היא שלא ברור הכינוי בעת מתן התשובה.

בתיאור המצב הבא:

במכונית אחת נוסעים 3 ילדים. כמה ילדים נוסעים ב-5 מכוניות?

האם הכינוי הוא: מכוניות או ילדים?

כדי להבין שהקבוצה שאותה מונים מכילה 3 ילדים ואותה קבוצה נמנית 5 פעמים, יש צורך בהבחנה בין מקבל הפעולה לבין עושה הפעולה.

ההשפעה של ההבחנה בין הכופל והנכפל על החילוק

לבעיה :

במכונית אחת נוסעים 3 ילדים. כמה ילדים נוסעים ב-5 מכוניות?

יש שני הפכים של החילוק:

א) **חילוק לחלקים**

15 ילדים נסעו ב-5 מכוניות. כמה ילדים נסעו בכל מכונית?

התשובה המתבקשת היא: כמה פריטים יש בכל קבוצה, כלומר, בכל מכונית נסעו 3 ילדים.

ב) **חילוק להכלה**

15 ילדים נסעו במכוניות. בכל מכונית נסעו 3 ילדים. בכמה מכוניות הם נסעו?

התשובה המתבקשת היא : כמה קבוצות היו, כלומר, הם נסעו ב-5 מכוניות.

כפל

שלם = מספר האיברים בכל קבוצה X מספר הקבוצות

מכפלה ניכפל כופל

חילוק לחלקים

מספר האיברים בכל קבוצה = מספר הקבוצות : **שלם**

מנה מחלק מחולק

חילוק להכלה

מספר הקבוצות = מספר האיברים בכל קבוצה : **שלם**

מנה מחלק מחולק

אי הבחנה בין מקבל הפעולה [הקבוצה] לבין מבצע הפעולה [המונה את מספר הקבוצות] בכפל מונעת את ההבנה של שני סוגי החילוק.

כיוון הכתיבה

כדי שהמינוח יתאים למשמעות, כדאי לחזור ולבחון את השאלה: מה פעמים מה?

מכיוון שנוסחאות מתמטיות כותבים משמאל לימין, תרגומו הטבעי של

$$3 \times 5 =$$

הוא "3 פעמים 5", כלומר: $= 5 + 5 + 5$, שמשמעותו חיבור 3 קבוצות שגודל כל אחת מהן הוא 5.

כיוון הכתיבה יהיה, אם כן:

3 x 5 =

נכפל כופל

כתיבה כזאת עונה על האופי הא-סימטרי של הכפל, על המינוחים באנגלית, כפי שמציעה הבריטניקה, ועל המקובל בעברית, בה המונה מקדים את שם העצם, כמו: ארבעה שולחנות.

הכיוון הזה מתייחס לכתיבה אופקית של התרגיל. כאשר יש תרגיל של כפל ארוך, כמו:

5 x 415 =

שהוא תשובה לבעיה:

כל חנות באיזור מגורים קנתה 415 קופסות סרדינים. באותו איזור היו 5 חנויות. כמה קופסות סרדינים נמכרו לחנויות שבאיזור?

בכתיבה עם הכינויים התרגיל ייראה כך:

5 x קופסות סרדינים 415 = קופסות סרדינים 2075

כאשר אנחנו פותרים תרגיל זה במאונך, איננו מתייחסים למעמדו של הגורם ככופל או כנכפל אלא לנוחיות החישוב. לכן התרגיל ייכתב כך:

```
  413
x
    5
---------
```

בכתיבה כזו איננו מבחינים בין כופל לנכפל, אלא בין גורם שמספר ספרותיו רב לבין גורם שמספר ספרותיו קטן.

סיכום

מכל האמור ברור שיש חשיבות מרובה להבחנה בין כופל לנכפל. הבחנה זו תורמת להבנת הכפל, החילוק ובעיות בנושאים אלה.

ההבחנה תורמת להבנת החשיבות של הכינויים כחלק מהותי של הפתרון.

חשוב ביותר להבחין בתפקידים השונים של הכופל [הפועל] ושל הנכפל [מקבל הפעולה] ולהקפיד על הגדרתם ועל סדר כתיבתם, שבו הכופל מקדים את הנכפל, כנדרש מחוקי המתמטיקה והלשון.

במעבר לכתיבה מאונכת ולפתרון הטכני של תרגילי הכפל מובא בחשבון שיקול של נוחיות שאינו קשור למשמעות הפעולה.

24.7.04